G　抽象線形代数　講義報告[1]

２００８年2月3日（日）　１４：３０－１７：３０

内積と内積空間を定義し、内積空間の具体例をいくつか扱った。次に内積空間の直交系の線形独立性を示し、正規直交系の性質を調べた。最後に、正射影定理を示すために二つの補題を証明した。

1　内積と内積空間

1.1　内積と内積空間の定義

定義 1.1 (内積). V を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とするとき、$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \ni (u, v) \to \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ が、**内積**であるとは、次の条件を満たすことである。

S1:対称性 $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \quad \forall u, v \in V$

S2:双線形性 $\forall u, \forall v, \forall w \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について、

1:左線形性 $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha \langle u, w\rangle + \beta \langle u, w\rangle$

2:右線形性 $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha \langle u, v\rangle + \beta \langle u, w\rangle$

S3:正定値性 $\langle u, u\rangle \geq 0\ (\forall u \in V)$ で、$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

線形空間 V に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとき、$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を**内積空間**という。

例題 1.1. n次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の元 $x =^t (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), y =^t (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ に対し、標準内積

$$\langle x, y\rangle_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$$

を与えると、数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は、*classical* な *Euclid* 空間になる。

例題 1.2. 区間 $I = [\alpha, \beta]$ を定義域とする実数値連続関数全体の作る $\mathbb{R}$ 上の代数 $C(I)$ の元 $f, g \in C(I)$ に対して、内積

$$\langle f, g\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) g(\xi) d\xi$$

を与える。$(C(I), \langle\ ,\ \rangle)$ は $pre-Hilbert$ 空間になる。

例題 1.3. n 次以下の実係数多項式全体の作る線型空間 $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ 上に、次の３つの内積を与えることができる。

1. $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ に対して、次の内積を入れる。

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!}$$

2. 相異なる実数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ を固定するとき、$f, g \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ に対して、次の内積を入れる。

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{n} f(x_\nu) g(x_\nu)$$

3. $f, g \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ を閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上の連続関数として見るとき、

$$\langle f, g\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) g(\xi) d\xi$$

[1]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

1.1.1 ノルムの概念

内積空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ で定義される実数値関数
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$
を**ノルム**という。このノルムから自然な距離が生まれる。
$$d_{\|\cdot\|}(u, v) = \|u - v\|$$
$d_{\|\cdot\|}$ をノルム $\|\cdot\|$ から導かれる**距離**という。
$$\bar{B}_1(0) = \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$$
を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ で定まる**ノルム単位球**という。

1.2 直交性

定義 1.2 (直交補空間). A を内積空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ の空でない部分集合とするとき、
$$A^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, a\rangle = 0,\ \forall a \in V\}$$
を A の**直交補空間**という。

練習問題 1.1.

1. $A^{\perp}$ は V の線形部分空間である。
2. $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$

命題 1.1. $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を有限次元の内積空間とする。

1. $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\} \subset V$ とするとき、
$$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}^{\perp} = (Span(A))^{\perp} = \bigcap_{j=1}^{r} (a_j)^{\perp}$$
2. W が V の線形部分空間のとき、
$$W^{\perp\perp} = W$$
3. A を空でない集合とするとき、
$$A^{\perp\perp} = Span(A)$$

1.2.1 直交系・正規直交系・正規直交基底

定義 1.3 (直交系). 内積空間 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ の部分集合 $D \subset V$ が**直交系**であるとは、任意の $u, v \in D$ $(u \neq v)$ に対して、$\langle u, v\rangle = 0$ が成立することである。特に、D が唯一の元からなるとき、D は**自明な直交系**という。D が直交系で、全ての $u \in D$ に対して、$\|u\| = 1$ という条件を満たすとき、D を**正規直交系**という。

練習問題 1.2.

1. D が直交系のとき、D は線形独立である。
2. D が有限正規直交系 $D := \{f_1, f_2, \cdots, f_r\}$ であるとき、
   (a) $\forall v \in Span(D)$ について
$$v = \sum_{j=1}^{r} \langle v, f_j\rangle f_j$$
   という型に、ただ一通りに表示できる。
   (b)
$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{r} |\langle v, f_j\rangle|^2$$

編集　J.S